نکات فصل حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت

نکته : هر بازهٔ باز شامل نقطهٔ a را یک همسایگی نقطه به طول a می‌گوییم. به عبارت دیگر به بازهٔ (c,d) یک همسایگی نقطهٔ a می‌گوییم هرگاه $a\in(c,d)$

نکته : همسایگی از نقطه‌ای به طول a که نقطهٔ a از آن حذف شده باشد، همسایگی نقطهٔ a نام دارد.

نکته : در هر یک از حالت‌های زیر تابع f در $x=a$ حد ندارد :

۱) تابع f در هیچ همسایگی محذوف نقطهٔ a تعریف نشده باشد.

2) حد چپ و راست تابع f در $x=a$ یکسان نباشد.

3) حد چپ و راست تابع f یکسان باشد ولی برابر یک عدد حقیقی نباشند.

نکته :

تابع \ وضعیت	f و g در $x=a$ حد دارند	f در $x=a$ حد دارد ولی g ندارد	f و g در $x=a$ حد ندارند
$f\pm g$	حد دارد	حد ندارد	معلوم نیست
$f\times g$	حد دارد	معلوم نیست	معلوم نیست
$\frac{f}{g}$	حد دارد $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$	معلوم نیست	معلوم نیست
$\frac{g}{f}$	حد دارد $\lim_{x\to a} f(x)\neq 0$	حد ندارد	معلوم نیست

نکته : فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=L$، در این صورت :

۱) اگر $L\notin \mathbb{Z}$ آنگاه $\lim_{x\to a}[f(x)]=[L]$

2) اگر $L\in \mathbb{Z}$، آنگاه باید بسنجیم که وقتی $x\to a^+$، $x\to a^-$ یا $x\to a$، مقادیر $f(x)$ به کدام یک از مقادیر L^+، L^- یا دقیقاً L نزدیک می‌شوند و بر اساس آن حاصل حد را بدست می‌آوریم.

نکته : برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a} f\circ g(x)$، اگر $\lim_{x\to a} g(x)=b$ باشد، حتماً باید مشخص کنیم که عدد b، کدام یک از عددهای b^+، b^- یا دقیقاً b است.

سپس با استفاده از آن به ترتیب $\lim_{x\to b^+} f(x)$، $\lim_{x\to b^-} f(x)$ یا $f(b)$ را بدست می‌آوریم.

نکته:

1) $\dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}}=$ تعریف نشده

2) $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$

3) $\dfrac{\text{صفر حدی}}{\text{عدد}\neq 0}=0$

4) $\dfrac{\text{عدد}}{\infty}=0$

5) $\dfrac{\text{صفر حدی}}{\infty}=0$

6) $(\text{صفر مطلق})\times\infty=0$

7) $(\text{صفر حدی})^{(\text{صفر مطلق})}=1$

8) $(\text{صفر مطلق})^{\text{صفر حدی مثبت}}=0$

نکته: (قاعده هوپیتال): فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a مشتق پذیر باشند و برای هر x در این همسایگی $g'(x)\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ در این صورت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نکته: برای رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$ که در آن حداقل یکی از توابع صورت یا مخرج کسر رادیکالی باشند، می‌توان صورت و مخرج کسر را در عامل گویا کننده عبارت رادیکالی ضرب نمود.

نکته: هم‌ارزی:

$$\sin U \overset{U\to 0}{\sim} U \qquad \sin^n U \overset{U\to 0}{\sim} U^n$$

$$\tan U \overset{U\to 0}{\sim} U \qquad \tan^n U \overset{U\to 0}{\sim} U^n$$

$$1-\cos U \overset{U\to 0}{\sim} \frac{U^2}{2} \qquad U-\sin U \overset{U\to 0}{\sim} \frac{U^3}{6}$$

$$\tan U-\sin U \overset{U\to 0}{\sim} \frac{U^3}{2} \qquad \tan U-U \overset{U\to 0}{\sim} \frac{U^3}{3}$$

نکته: با فرض $k\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$\lim_{x\to (k\pi+\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty \qquad \lim_{x\to (k\pi+\frac{\pi}{2})^-}\tan x=+\infty$$

$$\frac{\infty}{\text{صفر}}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to (k\pi)^+}\cot x=+\infty \qquad \lim_{x\to (k\pi)^-}\cot x=-\infty$$

نکته: به طور کلی اگر U تابعی از x باشد، داریم:

$$[U]+[-U]=\begin{cases}0 & U\in \mathbb{Z}\\ -1 & U\notin \mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر عدد حقیقی a، داریم: $\lim\limits_{x\to a}([U]+[-U])=-1$

نکته: اگر $a>1$ آن‌گاه: $a^{+\infty}=+\infty$ ، $a^{-\infty}=0$

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\infty-\infty$، آن‌گاه برای رفع ابهام این حد در صورتی که تابع f و g کسری باشند، به کمک مشترک نمودن مخرج کسرها، حدها را به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل کرده و سپس از آن رفع ابهام می‌نماییم.

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x).g(x)=0\times\infty$، بطوریکه $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$، برای رفع ابهام آن، حد را به صورت $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ می‌نویسیم تا حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل شود و سپس از آن رفع ابهام می‌نماییم.

نکته: بسط دوجمله‌ای خیام:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\dots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

نکته: هم‌ارزی پرتکرار:

$$\lim\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots+1}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots+1'}=\begin{cases}\frac{a}{a'}\ (\text{عدد غیر صفر}) & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

نکته: اگر تابع f و g در بازهٔ $(a,+\infty)$ یا $(-\infty,a)$ تعریف شده باشند و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ و تابع g دارای برد محدود باشد، هرچند این تابع وقتی $x\to\pm\infty$ حد نداشته باشد، آن‌گاه:

$$f\pm g\sim f$$

نکته: وقتی $U\to\pm\infty$، آن‌گاه $[U]\sim U$

نکته: اگر $0<a<b$، آن‌گاه:

$$x\to+\infty:\ a^{x+n}\pm b^{x+m}\sim\pm b^{x+m}$$

$$x\to-\infty:\ a^{x+n}\pm b^{x+m}\sim a^{x+n}$$

نکته: توابع به‌فرم $F(x)=\begin{cases} F_1(x) & x\in \mathbb{Z} \\ F_2(x) & x\notin \mathbb{Z} \end{cases}$, $F(x)=\begin{cases} F_1(x) & x\in \mathbb{Q} \\ F_2(x) & x\notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ، وقتی $x\to +\infty$ (یا $x\to -\infty$)، زمانی حد دارند که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to +\infty} F_1(x) = \lim F_2(x) = \text{عدد حقیقی}$$

$$\left(\text{یا } \lim_{x\to -\infty} F_1(x) = \lim F_2(x) = \text{عدد حقیقی}\right)$$

نکته: ترتیب سرعت رشد برخی از توابع مهم وقتی $x\to +\infty$، به صورت زیر است:

$$\log_a x \ll \sqrt[k]{x} \ll x^b \ll c^x \ll x^x \quad (c>1, b\geq 1, k\geq 2, k\in \mathbb{N}, 1\neq a>0)$$

چندجمله‌ای — نمایی

نکته: $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می‌گوییم هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ب) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

پ) $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ت) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

نکته: اگر مخرج تابع f پیوسته و $x=a$ ریشهٔ مخرج کسر باشد، آنگاه $x=a$ مجانب قائم نمودار f است، مگر آنکه یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد:

1) $x=a$ ریشهٔ صورت کسر نیز باشد و حالت مبهم $\frac{0}{0}$ اتفاق بیفتد و پس از رفع ابهام، حاصل حد ∞ نشود (علامت مهم نیست)

2) تابع f در هیچ یک از همسایگی‌های چپ یا راست $x=a$ تعریف نشده باشد.

نکته: اگر نمودار تابع f در اطراف مجانب قائم خود به یکی از دو صورت  یا  باشد، آنگاه به $x=a$، مجانب قائم مضاعف تابع f می‌گوییم. در توابع کسری مجانب قائم مضاعف زمانی رخ می‌دهد که پس از ساده کردن تابع، $x=a$ ریشهٔ مضاعف و یا مکرر با توان زوج مخرج کسر باشد.

نکته: نقطهٔ توخالی روی نمودار تابع f، به طوری که تابع f در آن نقطه حد داشته باشد، ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است.

نکته: به طور کلی ریشه های عامل ضربی $[g(x)]$ در مخرج کسر تابع f، برای تابع f مجانب قائم نیستند. به عنوان مثال در تابع $f(x)=\dfrac{1}{[2x](x-1)}$، ریشه های $[2x]$ برای تابع f مجانب قائم نیستند و $x=1$ تنها مجانب قائم این تابع است.

نکته: خط $y=b$ را مجانب افقی تابع f می گوییم، هرگاه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$

بنابراین برای یافتن مجانب افقی یک تابع کافی است حد بینهایت آن تابع را بیابیم. اگر حاصل این حد برابر b باشد، $y=b$ مجانب افقی تابع است.

نکته: اگر $x=a$ مجانب قائم و $y=b$ مجانب افقی تابع f باشد، آن گاه نقطه به مختصات $A(a,b)$ محل تلاقی مجانب های افقی و قائم نمودار تابع f است.

نکته: شرط پیوستگی در یک نقطه: تابع f در $x=a$ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

نکته: 1) تابع f را روی بازهٔ (a,b) پیوسته گوییم، هرگاه در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.

2) تابع f را روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته گوییم، هرگاه در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در $x=a$ پیوستگی راست و در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

3) تابع f را روی بازهٔ $[a,b)$ یا بازهٔ $(a,b]$ پیوسته گوییم، هرگاه در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در $x=a$ (یا در $x=b$) پیوستگی راست (یا پیوستگی چپ) داشته باشد.

نکته: مجانب قائم توابع لگاریتمی:

1) $y=\log^{(x-b)}$: $x=b$ خط مجانب قائم

2) $y=\log^{(kx+b)}$: $x=\dfrac{-b}{k}$ خط مجانب قائم

مجانب قائم در توابع مثلثاتی: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan x$ دارای مجانب قائم است. توجه کنید که $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ پس از معادلهٔ $\cos x=0$، نتیجه می‌شود $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$، بنابراین معادلهٔ مجانب‌های قائم تابع $y=\tan x$، خطوط به معادلهٔ $x=\frac{3\pi}{2}$، $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{-\pi}{2}$ و ... هستند.

توجه: حد هر چندجمله‌ای به صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+k$ (n عددی طبیعی) وقتی x به $\pm\infty$ میل می‌کند برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگترین درجه است:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\dots+k)=\lim_{x\to\pm\infty}ax^n$$